EXERCICE N°3 : 6 points 35 '

Soit g(x)=x+ln $(e^{-2x}+1)$; x ∈ [0,+∞[. On désigne par ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative selon un repère orthonormé (O, $\vec{u},\vec{v}$).

1) Etablir le tableau de variation de g.

2) Montrer que la droite D : y=x est une asymptote à ($\mathscr{C}$) au voisinage de +∞.

3) Etudier la position de ($\mathscr{C}$) par rapport à D.

4) Tracer ($\mathscr{C}$) et D.

5) a) Montrer que f réalise une bijection de [0,+∞[sur un intervalle K qu'on précisera.

b) Tracer la courbe ($\mathscr{C}$ ') de la fonction réciproque f^{-1} de f.

6) a) Montrer que pour tout t de [0,+∞[on a : $1-t\leq \frac{1}{1+t}\leq 1$

b) En déduire que pour tout x de [0,+∞[on a : $x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(x+1)\leq x$

c) En déduire un encadrement de $\ln(1+e^{-2t})$ pour tout t de [0,+∞[.

7) Soit A_n la mesure de l'aire du domaine limité par la courbe ($\mathscr{C}$), la droite D et les droites d'équations x=0 et x=n.

a) Montrer que $\frac{3}{8}-\frac{1}{2}e^{-2n}+\frac{1}{8}e^{-4n}\leq A_n\leq \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2n}$.

b) En déduire un encadrement de $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn